Rompecabezas matemáticos

*Por Antonio Montalbán**

Continuando con la serie de problemas que se proponen en estas páginas, se plantea uno nuevo y se da la solución explicada al problema de la detección de una moneda falsa, entre 13, con solo tres pesadas, planteado en el número anterior.

Nuevo problema: Tres casas y tres servicios

Planteo:

Este es un problema muy difundido, que muchos lectores ya conocerán. La figura representa las únicas tres casas de un pequeño pueblo, y además se representan la central de la luz, la central del teléfono y la central de la Internet.

Pregunta:

¿Se podrán representar sobre el plano las conexiones de cada casa con cada servicio sin que se crucen los cables?

Pregunta extra:

Supongamos ahora que este pueblo está situado un extraño planeta con forma de rosquilla. La pregunta es la misma, sólo que ahora los cables pueden dar vueltas alrededor de la rosquilla, pero deben mantenerse sobre la superficie de la misma.

Problema anterior: ¿Cuál es la moneda falsa?

Planteo:

Supongamos que tenemos 13 monedas, de las cuales una es falsa.
Todas las monedas se ven iguales, la única diferencia es que la falsa pesa diferente de las demás. Para descubrir la moneda falsa tenemos una balanza de platillos. Podemos elegir dos subconjuntos de monedas y comparar su peso, y así saber si pesan igual, o si un subconjunto pesa más que el otro.

Pregunta:

¿Cómo se puede encontrar la moneda falsa usando la balanza solamente 3 veces?

Problema ¿Cual es la moneda falsa?

Solución:

La solución de este problema es menos elegante que la de los problemas anteriores, y requiere considerar varios casos.
Llamémosle a las 13 monedas: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m*.

Como primera pesada, pesemos dos subconjuntos de 4 monedas cada uno: *(a, b, c, d)* de un lado y *(e, f, g, h)* del otro.
Analicemos los posibles resultados de las pesadas:

- **Caso 1:** *(a, b, c, d)* y *(e, f, g, h)* pesan igual.

En este caso sabemos que la moneda diferente es una de las que no pesamos, o sea, la moneda diferente está en el subconjunto *(i, j, k, l, m)*.

Como segunda pesada, pesemos *(h, i)* de un lado y *(j, k)* del otro. Nótese que *h* es una de las monedas que sabemos tiene peso normal.

- **Caso 1.1:** *(h, i)* y *(j, k)* pesan igual.

Entonces sabemos que la diferente es *l* ó *m*.

Como tercera y última pesada pongamos a *(l)* en un platillo y a *(a)* en el otro, recordando que sabemos que *a* tiene peso normal.
Si son iguales, la diferente es *m*, y son distintas, la diferente es *l*.

- **Caso 1.2:** *(h, i)* y *(j, k)* pesan distinto.

Digamos que *(h, i)* pesa más que *(j, k)*. En este caso sabemos que:
(*) la moneda diferente está en el subconjunto *i, j, k* -recordar que *h* es una de las monedas que sabemos tiene peso normal-. También sabemos que si es *i*, pesa más, y si es *j*, o *k*, pesa menos.
Lo que hacemos en este caso es lo siguiente:

Como tercera y última pesada pongamos a *(j)* en un platillo y a *(k)* en el otro.
Si son iguales la diferente es *i*, si no, la diferente es la que pese menos entre *j* y *k*.
El caso inverso, si *(h, i)* pesa menos que *(j, k)*, se analiza en forma análoga.

- **Caso 2:** *(a, b, c, d)* y *(e, f, g, h)* pesan distinto.

Digamos que *(a, b, c, d)* pesa más que *(e, f, g, h)*. El caso inverso es análogo. Entonces sabemos que la moneda diferente es una del subconjunto *(a, b, c, d, e, f, g, h)* y que si está entre *(a, b, c, d)*, pesa más, y si está entre *(e, f, g, h)*, pesa menos.

Como segunda pesada, pongamos *(a, b, e, f)* en un platillo y a *(c, g, i, j)* en otro. Estamos dejando las monedas *a, b, g*, en el mismo platillo que estaban, cambiamos *e, f, c* del platillo, sacamos *d, h* de la balanza e introducimos a *i* y *j* que son monedas que sabemos tienen peso normal.

- **Caso 2.1:** *(a, b, e, f)* y *(c, g, i, j)* pesan igual.

Entonces sabemos que la diferente es *d* o *h*.

Como **tercera y última pesada** pongamos a *(d)* en un platillo y a *(a)* en el otro (ya comprobamos que *a* es de peso normal). Si son iguales, la diferente es *h*, y si no, la distinta es *d*.

- **Caso 2.2:** *(a, b, e, f)* pesa más que *(c, g, i, j)*.

En este caso dado que el resultado es el mismo que al inicio (habíamos supuesto que *(a, b, c, d)* pesa más que *(e, f, g, h)*) entonces las monedas que se mantuvieron en su platillo original son las candidatas a ser diferentes. O sea, tenemos que:
(*) La moneda diferente está entre *a*, *b* y *g*, si es *g*, pesa menos, y si es *a*, o *b*, es porque pesa más.
Nótese que esta situación es análoga a la situación (*) dentro del caso 1.2.
Lo que hacemos en este caso es lo siguiente:

Como tercera y última pesada pongamos a *(a)* en un platillo y a *(b)* en el otro.
Si son iguales la diferente es *g*, si no, la diferente es la que pese más.

- **Caso 2.3:** *(a, b, e, f)* pesa menos que *(c, g, i, j)*.

En este caso las monedas que cambiaron de platillo son las candidatas a ser diferentes. O sea, tenemos que: La moneda diferente está entre *e, f, c,* y si es *c*, pesa más, y si es *e*, o *f*, es porque pesa menos.
Nótese que esta situación es análoga a la situación (*) dentro del caso 1.2.
Lo que hacemos en este caso es lo siguiente:

Como tercera y última pesada pongamos a *(e)* en un platillo y a *(f)* en el otro.
Si son iguales la diferente es *c*, si no, la diferente es la que pese menos.

****Antonio Montalbán** es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de la República y PhD de la Universidad de Cornell (Estados Unidos). Actualmente es profesor titular en la Universidad de Chicago (Estados Unidos).*